数理解析研究所講究録 第2127巻 2019年 147-166

$U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の有限次元既約表現

和田堅太郎 (信州大学理学部)
Kentaro Wada (Faculty of Science, Shinshu University)

1 Introduction

$(q,\mathbf{Q})$-カレント代数 $U_q(\mathfrak{gl}_m^{\langle\mathbf{Q}\rangle}[x])$ は, cyclotomic q-Schur 代数の表現論を動機として [Wad16] において導入された結合代数である。(正確には, [Wad16] で導入したものは, $U_q(\mathfrak{gl}_m^{\langle\mathbf{Q}\rangle}[x])$ のパラメータを特別に取ったものと同型になるものであり, $U_q(\mathfrak{gl}_m^{\langle\mathbf{Q}\rangle}[x])$ の定義自体はどこにも書かれていないが, 気にしないことにしよう)。cyclotomic q-Schur 代数との関係については, [和田 09], [和田 13] に解説があるのでそちらを参照していただきたい。

$U_q(\mathfrak{gl}_m^{\langle\mathbf{Q}\rangle}[x])$ は一般線型リー代数 $\mathfrak{gl}_m$ に付随して定義されるものであり, 特殊線型リー代数 $\mathfrak{sl}_m$ に付随した $(q,\mathbf{Q})$-カレント代数 $U_q(\mathfrak{sl}_m^{\langle\mathbf{Q}\rangle}[x])$ を考えることもできる。($(q,\mathbf{Q})$-カレント代数自体は, 一般の単純リー代数に付随して定義することができるが, A 型以外の場合については真面目に考えていない。) $U_q(\mathfrak{gl}_m^{\langle\mathbf{Q}\rangle}[x])$ (resp. $U_q(\mathfrak{sl}_m^{\langle\mathbf{Q}\rangle}[x])$) はパラメータ $q\in\mathbb{C}^\times$ と $\mathbf{Q}=(Q_1,\dots,Q_{m-1})\in\mathbb{C}^{m-1}$ を持った $\mathbb{C}$ 上の結合代数であり, $q=1$ とし, 符号の違いを無視すれば, $\mathfrak{gl}_m$ (resp. $\mathfrak{sl}_m$) の多項式カレントリー代数 $\mathfrak{gl}_m[x]$ (resp. $\mathfrak{sl}_m[x]$) の $\mathbf{Q}$-変形 $\mathfrak{gl}_m^{\langle\mathbf{Q}\rangle}[x]$ (resp. $\mathfrak{sl}_m^{\langle\mathbf{Q}\rangle}[x]$) の普遍包絡代数と同型となる。変形カレントリー代数 $\mathfrak{gl}_m^{\langle\mathbf{Q}\rangle}[x]$ (resp. $\mathfrak{sl}_m^{\langle\mathbf{Q}\rangle}[x]$) の有限次元既約表現については, [Wad18] で扱われている。また, [和田 16] にその解説がある。

今回は, $\mathfrak{sl}_2$ に付随した (q,Q)-カレント代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の有限次元既約表現について, 現段階で分かっている部分まで解説したい。特に重要な例, かつ多くのことを示唆してくれる 2 次元表現の場合を詳しく書きたいと思う。

2 (q,Q)-カレント代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$

Definition 2.1. $q\in\mathbb{C}^\times$, $Q\in\mathbb{C}$ に対し, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ を以下の生成元と基本関係式によって定まる $\mathbb{C}$ 上の結合代数として定義する：

生成元: $\mathcal{X}_t^\pm$, $\mathcal{J}_t$ $(t\geq 0)$, $\mathcal{K}^\pm$,
基本関係式:

$$
\begin{aligned}
&\text{(Q1)} && \mathcal{K}^+\mathcal{K}^-=\mathcal{K}^-\mathcal{K}^+=1,\quad (\mathcal{K}^-)^2=1-(q-q^{-1})\mathcal{J}_0,\\
&\text{(Q2)} && [\mathcal{K}^+,\mathcal{J}_t]=[\mathcal{J}_s,\mathcal{J}_t]=0,\\
&\text{(Q3)} && \mathcal{K}^+\mathcal{X}_t^\pm\mathcal{K}^-=q^{\pm2}\mathcal{X}_t^\pm,\\
&\text{(Q4)} && q^{\pm2}\mathcal{J}_0\mathcal{X}_t^\pm-q^{\mp2}\mathcal{X}_t^\pm\mathcal{J}_0=\pm[2]\mathcal{X}_t^\pm,\\
&\text{(Q5)} && [\mathcal{J}_{s+1},\mathcal{X}_t^\pm]=q^{\pm2}\mathcal{J}_s\mathcal{X}_{t+1}^\pm-q^{\mp2}\mathcal{X}_{t+1}^\pm\mathcal{J}_s,\\
&\text{(Q6)} && [\mathcal{X}_t^+,\mathcal{X}_s^-]=\mathcal{K}^+\mathcal{J}_{s+t}-Q\mathcal{K}^+\mathcal{J}_{s+t+1},\\
&\text{(Q7)} && \mathcal{X}_{t+1}^\pm\mathcal{X}_s^\pm-q^{\pm2}\mathcal{X}_s^\pm\mathcal{X}_{t+1}^\pm=q^{\pm2}\mathcal{X}_t^\pm\mathcal{X}_{s+1}^\pm-\mathcal{X}_{s+1}^\pm\mathcal{X}_t^\pm,
\end{aligned}
$$

ここで, $n\in\mathbb{Z}$ に対し, $[n]=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}$ である。

2.2. Introduction にも書いたように, $q=1$ として $\mathcal{K}^\pm$ に関する符号を無視すると, Q-変形カレントリー代数 $\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x]$ の普遍包絡代数と同型になる。つまり, 結合代数として $U_1(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])/\langle\mathcal{K}^+-1\rangle_{\mathrm{ideal}}\cong U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ である。

一方で, $Q=0$ のとき, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ は以下のように, $\mathfrak{sl}_2$ に付随した量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ との関係がある。

Proposition 2.3. $Q=0$, $q \neq 0, \pm 1$ のとき, 代数の準同型写像

$$\Theta : U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0 \rangle}[x]) \to U_q(L\mathfrak{sl}_2)$$

で, $\operatorname{Im}\Theta$ が $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の"多項式部分" *(*ループリー代数 $L\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ の部分リー代数 $\mathfrak{sl}_2[x] = \mathfrak{sl}_2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x]$ *(*カレントリー代数*)* に対応する $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の部分代数*)* となるものが存在する。

Assumption 2.4. 以下, $q \in \mathbb{C}^{\times}$ は 1 の冪根でないと仮定する。

2.5. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を $\mathfrak{sl}_2$ に付随した量子群とし, その Chevalley 生成元を $e, f, K^{\pm}$ とする。このとき, 量子ループ代数の場合と同様に, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x])$ から $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ への evaluation 準同型が定義できる。

Proposition 2.6 (evaluation 準同型)**.** $\gamma \in \mathbb{C}$ に対し, 代数の準同型 $\mathbf{ev}_{\gamma}^{\langle Q \rangle} : U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x]) \to U_q(\mathfrak{sl}_2)$,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{X}_t^{+} \mapsto \gamma^t q^{-t} (K^{+})^t e - Q \gamma^{t+1} q^{-(t+1)} (K^{+})^{t+1} e,\\
&\mathcal{X}_t^{-} \mapsto \gamma^t q^{-t} f (K^{+})^t,\\
&\mathcal{J}_t \mapsto \gamma^t q^{-t} (K^{+})^t \frac{1-(K^{-})^2}{q-q^{-1}} - \gamma^t (q^t - q^{-t})(K^{+})^{t-1} f e,\\
&\mathcal{K}^{\pm} \mapsto K^{\pm}
\end{aligned}$$

が存在する。

2.7. $\gamma \in \mathbb{C}$ に対し, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-加群 M を $\mathbf{ev}_{\gamma}^{\langle Q \rangle} : U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x]) \to U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を通じて $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x])$-加群と思ったものを, M の γ における **evaluation 加群**といい, $M^{\mathbf{ev}_{\gamma}^{\langle Q \rangle}}$ と表す。

Remark 2.8.

(i) $Q = 0$, $\gamma \in \mathbb{C}^{\times}$ のとき, Proposition 2.6 の $\mathbf{ev}_{\gamma}^{\langle 0 \rangle}$ は, 量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の γ における evaluation 準同型 ([Jim86], cf.

[CP91, Proposition 4.1]) を, Proposition 2.3 における Θ を通じて $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ に制限したものと一致する。

(ii) $Q=0$, $\gamma=0$ のとき, $\mathbf{ev}_0^{\langle 0\rangle}: U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x]) \to U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は存在するが, 量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の $\gamma=0$ における evaluation 準同型は存在しない。これは, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ が Θ を通じて, $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の “多項式部分” に制限したものであることが効いている。

(iii) $Q=0$ のとき, $\mathbf{ev}_\gamma^{\langle 0\rangle}$ は全射であるが, $Q\neq 0$ のときは, $\mathbf{ev}_\gamma^{\langle Q\rangle}$ は全射ではない。

2.9. 基本関係式 (Q1) より,

$$\mathcal{J}_0 = \frac{1-(\mathcal{K}^-)^2}{q-q^{-1}},$$

(Q4) と (Q5) より, $t \geq 0$ に対し,

$$\mathcal{X}_{t+1}^{\pm} = \pm\frac{\mathcal{J}_1\mathcal{X}_t^{\pm} - \mathcal{X}_t^{\pm}\mathcal{J}_1}{[2]}$$

(Q6) より, $t \geq 0$ に対し,

$$\mathcal{J}_{t+1} = \begin{cases} \mathcal{K}^-\left(\mathcal{X}_{t+1}^+\mathcal{X}_0^- - \mathcal{X}_0^-\mathcal{X}_{t+1}^+\right) & \text{if } Q=0, \\ -Q^{-1}\mathcal{K}^-\left(\mathcal{X}_t^+\mathcal{X}_0^- - \mathcal{X}_0^-\mathcal{X}_t^+\right) + Q^{-1}\mathcal{J}_t & \text{if } Q\neq 0 \end{cases}$$

となるので, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ は $\mathcal{X}_0^{\pm}$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{K}^{\pm}$ によって生成されることに注意しよう。(よって, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ からの代数の準同型写像は $\mathcal{X}_0^{\pm}$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{K}^{\pm}$ の行き先のみで一意的に定まる。)

2.10. $Q=0$ の場合, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ は, Proposition 2.3 の Θ が Hopf 代数の準同型となるような, Hopf 代数の構造を持つ (というよりかは, 量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の余積等を ”多項式部分” に制限したものを定義として採用する)。しかし, $Q\neq 0$ のときは, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ は余積の構造を持たないように思われる (余積が存在しないことが示されているわけではないが‥)。その

代わりに, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ は右 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-余加群代数となる。具体的には, 以下のことが成り立つ。

Proposition 2.11. *(i)* $Q=0$ のとき, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ は余積

$$\begin{aligned}
&\Delta : U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x]) \to U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x]) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x]),\\
&\quad \Delta(\mathcal{X}_0^+) = \mathcal{X}_0^+ \otimes \mathcal{K}^+ + 1 \otimes \mathcal{X}_0^+,\\
&\quad \Delta(\mathcal{X}_0^-) = \mathcal{X}_0^- \otimes 1 + \mathcal{K}^- \otimes \mathcal{X}_0^-,\\
&\quad \Delta(\mathcal{K}^\pm) = \mathcal{K}^\pm \otimes \mathcal{K}^\pm,\\
&\quad \Delta(\mathcal{J}_1) = \mathcal{J}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{J}_1 - (q^2 - q^{-2})\mathcal{X}_0^+ \otimes \mathcal{X}_1^-
\end{aligned}$$

と, 余単位 $\varepsilon : U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x]) \to \mathbb{C}$ $(\varepsilon(\mathcal{X}_0^\pm) = \varepsilon(\mathcal{J}_1) = 0,\ \varepsilon(\mathcal{K}^\pm) = 1)$ によって余代数となる。

(ii) 代数の準同型 $\Delta_r^{\langle Q\rangle} : U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x]) \to U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x]) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ で,

$$\begin{aligned}
&\Delta_r^{\langle Q\rangle}(\mathcal{X}_0^+) = \mathcal{X}_0^+ \otimes \mathcal{K}^+ + 1 \otimes \mathcal{X}_0^+,\\
&\Delta_r^{\langle Q\rangle}(\mathcal{X}_0^-) = \mathcal{X}_0^- \otimes 1 + \mathcal{K}^- \otimes \mathcal{X}_0^- - Q\mathcal{K}^+ \otimes \mathcal{X}_1^-,\\
&\Delta_r^{\langle Q\rangle}(\mathcal{K}^\pm) = \mathcal{K}^\pm \otimes \mathcal{K}^\pm,\\
&\Delta_r^{\langle Q\rangle}(\mathcal{J}_1) = \mathcal{J}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{J}_1 - (q^2 - q^{-2})\mathcal{X}_0^+ \otimes \mathcal{X}_1^-
\end{aligned}$$

によって定まるものが存在する。
さらに, $\Delta_r^{\langle Q\rangle}$ (及び, *(i)* の $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ の余代数構造) によって, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ は右 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-余加群代数としての構造を持つ。

Remark 2.12. $Q=0$ の場合の, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ の余積 Δ は, [CP91] で使われている $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の余積と Θ を通じて整合的なものである。

3 最高ウェイト加群

量子ループ代数の場合と同様に, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の有限次元既約加群は最高ウェイト加群となることが分かる。記号の準備も込めて, 最高ウェイト加群

についてまとめる。

3.1. $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の部分代数

$U_q^+ = \langle \mathcal{X}_t^+ \mid t \geq 0 \rangle_{\mathrm{alg.}}, \quad U_q^- = \langle \mathcal{X}_t^- \mid t \geq 0 \rangle_{\mathrm{alg.}}, \quad U_q^0 = \langle \mathcal{J}_t, \mathcal{K}^{\pm} \mid t \geq 0 \rangle_{\mathrm{alg.}}$

を考えると, 基本関係式より, 三角分解

$$U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x]) = U_q^- U_q^0 U_q^+$$

を得る。 ここで, U_q^0 は可換な部分代数である。そこで, この三角分解に沿って, 最高ウェイト加群を以下のように定義する。

Definition 3.2 (最高ウェイト加群)**.** $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群 M が**最高ウェイト加群**であるとは, ある $v_0 \in M$ が存在して,

(i) M は $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群として, v_0 で生成される。
つまり, $M = U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x]) \cdot v_0$ である。
(ii) 全ての $t \geq 0$ に対し, $\mathcal{X}_t^+ \cdot v_0 = 0$ である。
(iii) ある $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ が存在して, $\mathcal{K}^+ \cdot v_0 = \lambda v_0$ となる。
各 $t \geq 0$ に対し, ある $u_t \in \mathbb{C}$ が存在して, $\mathcal{J}_t \cdot v_0 = u_t v_0$ となる。

が成り立つことである。このとき, $\mathbf{u} = (\lambda, (u_t)_{t>0}) \in \mathbb{C}^\times \times \prod_{t>0} \mathbb{C}$ とおき, $\mathbf{u}$ を M の**最高ウェイト**, v_0 を最高ウェイト $\mathbf{u}$ の**最高ウェイトベクトル**という。(基本関係式 (Q1) より, $\mathcal{J}_0 = \frac{1-(\mathcal{K}^-)^2}{q-q^{-1}}$ となるので, $u_0 = \frac{1-\lambda^{-2}}{q-q^{-1}}$ となる。つまり, u_0 は λ より一意的に決まるので, 最高ウェイトには u_0 を含めていない。)

3.3. $\mathbf{u} = (\lambda, (u_t)_{t>0}) \in \mathbb{C}^\times \times \prod_{t>0} \mathbb{C}$ に対し,

$$\{\mathcal{X}_t^+, \mathcal{K}^+ - \lambda, \mathcal{J}_t - u_t \mid t \geq 0\}$$

によって生成される $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の左イデアルを $\mathfrak{I}(\mathbf{u})$ とおき, 商加群

$$\mathcal{M}(\mathbf{u}) := U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])/\mathfrak{I}(\mathbf{u})$$

を考えると, $\mathcal{M}(\mathbf{u})$ は $\overline{1}$ を最高ウェイトベクトルとする, 最高ウェイト $\mathbf{u}$ の最高ウェイト加群となる。この $\mathcal{M}(\mathbf{u})$ を **Verma 加群**という。任意の最高ウェイト $\mathbf{u}$ の最高ウェイト加群は, $\mathcal{M}(\mathbf{u})$ の商加群と同型である。さらに, $\mathcal{M}(\mathbf{u})$ は一意的な極大部分加群 $\mathrm{rad}\,\mathcal{M}(\mathbf{u})$ を持つ。そこで, 商加群

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathcal{M}(\mathbf{u})/\,\mathrm{rad}\,\mathcal{M}(\mathbf{u})$$

を考えると, 最高ウェイト $\mathbf{u}$ の既約最高ウェイト加群は $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ と同型になる。さらに次のことが成り立つ。

Proposition 3.4. 有限次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群は, 最高ウェイト加群である。特に, ある $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^\times \times \prod_{t>0} \mathbb{C}$ に対し, $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ と同型になる。

この Proposition より, 有限次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群の同型類を分類するには, $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元となる $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^\times \times \prod_{t>0} \mathbb{C}$ を分類すればよい。

4　$U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の 1 次元表現

$L = \mathbb{C}v$ を $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の 1 次元表現とする。$\mathcal{K}^+$ が可逆元であること, 及び基本関係式 (Q1), (Q3) に注意すれば, ある $\beta \in \mathbb{C}^\times$ が存在して,

$$\mathcal{K}^+ \cdot v = \beta v, \quad \mathcal{J}_0 \cdot v = \frac{1-\beta^{-2}}{q-q^{-1}} v \quad \mathcal{X}_t^\pm \cdot v = 0 \quad (t \geq 0)$$

となることが分かる。すると, 関係式 (Q1) と (Q6) より,

$$(\mathcal{J}_t - Q\mathcal{J}_{t+1}) \cdot v = \mathcal{K}^-(\mathcal{X}_t^+\mathcal{X}_0^- - \mathcal{X}_0^-\mathcal{X}_t^+) \cdot v = 0 \quad (t \geq 0)$$

となるので, $\mathcal{J}_t \cdot v = Q\mathcal{J}_{t+1} \cdot v$ $(t \geq 0)$ となるので,

$$\mathcal{J}_t \cdot v = \begin{cases} 0 & \text{if } Q = 0, \\ Q^{-t}\mathcal{J}_0 \cdot v & \text{if } Q \neq 0 \end{cases}$$

を得る。さらに, 基本関係式 (Q1) より,

$$\mathcal{J}_0 \cdot v = 0 \Leftrightarrow \mathcal{K}^+ \cdot v = \pm v$$

であることが分かる。そこで,

$$\mathbb{B}^{\langle Q\rangle} = \begin{cases} \{1, -1\} & \text{if } Q = 0, \\ \mathbb{C}^\times & \text{if } Q \neq 0, \end{cases} \quad \widetilde{\beta} = \frac{1-\beta^{-2}}{q-q^{-1}} \text{ for } \beta \in \mathbb{B}^{\langle Q\rangle}$$

とおき, $\beta \in \mathbb{B}^{\langle Q\rangle}$ に対し, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の 1 次元表現 $\mathcal{D}_\beta^{\langle Q\rangle}(1) = \mathbb{C}v$ を,

$$\mathcal{X}_t^\pm \cdot v = 0, \quad \mathcal{K}^+ \cdot v = \beta v, \quad \mathcal{J}_t \cdot v = \begin{cases} 0 & \text{if } Q = 0, \\ \widetilde{\beta} Q^{-t} v & \text{if } Q \neq 0 \end{cases}$$

と定めると, これは well-defined であることが確かめられる。以上より次が成り立つ。

Lemma 4.1. $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の 1 次元表現は, $\mathcal{D}_\beta^{\langle Q\rangle}(1)$ *(*$\beta \in \mathbb{B}^{\langle Q\rangle}$*)* と同型である。

5 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の 2 次元最高ウェイト加群

5.1. M を $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の 2 次元最高ウェイト加群とし, $v_0 \in M$ を最高ウェイトベクトルとする。定義より, $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, $u_t \in \mathbb{C}$ $(t \geq 0)$ が存在し,

$$\mathcal{X}_t^+ \cdot v_0 = 0, \quad \mathcal{K}^+ \cdot v_0 = \lambda v_0, \quad \mathcal{J}_t \cdot v_0 = u_t v_0 \quad (t \geq 0)$$

となる。

$\mathcal{X}_0^- \cdot v_0 = 0$ とすると, (Q4),(Q5) を用いて帰納的に考えることにより, $\mathcal{X}_t^- \cdot v_0 = 0$ $(t \geq 0)$ となり, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x]) \cdot v_0 \subsetneq M$ となってしまうので, v_0 が最高ウェイトベクトルであることに矛盾する。よって

$$\mathcal{X}_0^- \cdot v_0 \neq 0$$

となる。$v_1 = \mathcal{X}_0^- \cdot v_0$ とおけば, v_0 と v_1 は (Q3) より, $\mathcal{K}^+$ の作用に関して異なる固有値を持つので, $\{v_0, v_1\}$ は M の基底となる。さらに,

$$\mathcal{X}_t^- \cdot v_1 = 0 \quad (t \geq 0)$$

となることが分かる。

5.2. 次に, λ, u_t $(t \geq 0)$ の間の関係式を求めて, M 上の $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x])$ の作用を記述しよう。

まず, $\mathcal{X}_0^{-(2)} = (\mathcal{X}_0^-)^2/[2]$ とおくと, 上で議論したことから, $\mathcal{X}_0^{-(2)} \cdot v_0 = 0$ となることに注意する。

$\underline{Q = 0 \text{ の場合}}$

$\mathcal{X}_0^+ \mathcal{X}_0^{-(2)} \cdot v_0 = 0$ の左辺を基本関係式を用いて変形する ($\mathcal{X}_0^+ \mathcal{X}_0^{-(2)} \cdot v_0 = \{\mathcal{X}_0^{-(2)} \mathcal{X}_0^+ + (\cdots)\} \cdot v_0$ の形にする) ことにより,

$$\frac{q^{-1} - q\lambda^{-2}}{q - q^{-1}} \mathcal{X}_0^- \cdot v_0 = 0, \text{ よって, } \lambda = \pm q$$

を得る。次に, $\mathcal{X}_t^+ \mathcal{X}_1^+ \mathcal{X}_0^{-(2)} \cdot v_0 = 0$ の左辺を基本関係式を用いて変形することにより, $u_{t+1} = q u_1 u_t$ $(t \geq 0)$ を得る。よって,

$$u_t = q^{t-1} u_1^t \quad (t \geq 0)$$

を得る。ここで, (Q1) より, $u_0 = (1 - \lambda^{-2})(q - q^{-1})^{-1} = q^{-1}$ に注意する。そこで, $u_1 = q^{-1}\gamma$ $(\gamma \in \mathbb{C})$ であるとすると,

$$\lambda = \pm q, \quad u_t = q^{-1}\gamma^t \quad (t \geq 0)$$

を得る。このことと, 基本関係式を用いて計算すると,

$$\mathcal{X}_t^+ \cdot v_0 = 0, \quad \mathcal{X}_t^- \cdot v_0 = \gamma^t v_1, \quad \mathcal{K}^+ \cdot v_0 = \pm q v_0, \quad \mathcal{J}_t \cdot v_0 = q^{-1}\gamma^t v_0,$$
$$\mathcal{X}_t^+ \cdot v_1 = \pm \gamma^t v_0, \quad \mathcal{X}_t^- \cdot v_1 = 0, \quad \mathcal{K}^+ \cdot v_1 = \pm q^{-1} v_1, \quad \mathcal{J}_t \cdot v_1 = -q\gamma^t v_1$$

となる。逆に, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0 \rangle}[x])$ の 2 次元表現 $\mathcal{D}_{\gamma,\pm 1}^{\langle 0 \rangle}(2) = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1$ $(\gamma \in \mathbb{C})$ を上の作用によって定めると, これは well-defined であることが分かる。

以上より, $Q=0$ のとき, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ の 2 次元最高ウェイト加群は, ある $\mathcal{D}^{\langle 0\rangle}_{\gamma,\pm 1}(2)$ と同型であることが分かる。また, 任意の $\gamma\in\mathbb{C}$ に対し, $\mathcal{D}^{\langle 0\rangle}_{\gamma,\pm 1}(2)$ は既約である。

$\underline{Q\neq 0 \text{ のとき}}$

$\mathcal{X}_t^+\mathcal{X}_0^+\mathcal{X}_0^{-(2)}\cdot v_0=0$ の左辺を基本関係式を用いて変形することにより,

$$u_{t+2}=\bigl(q^3u_0-qQu_1-q^2\bigr)Q^{-2}u_t-\bigl(q^3u_0-qQu_1-q^2-1\bigr)Q^{-1}u_{t+1}$$

を得る。ここで, $X=\bigl(q^3u_0-qQu_1-q^2\bigr)Q^{-1}$ とおき, 3 項間漸化式 $u_{t+2}=XQ^{-1}u_t-\bigl(X-Q^{-1}\bigr)u_{t+1}$ を解くと, $t\geq 2$ に対し,

$$\begin{aligned}u_t=&\Bigl((-X)^{t-1}+(-X)^{t-2}Q^{-1}+\cdots+(-X)Q^{-t+2}\Bigr)(u_1-Q^{-1}u_0)\\&+Q^{-t+1}u_1\end{aligned}$$

となる。ここで, (Q1) に注意して,

$$\lambda=\beta q,\quad u_0=\frac{1-q^{-2}\beta^{-2}}{q-q^{-1}},\quad u_1=q^{-1}\gamma+Q^{-1}\frac{1-\beta^{-2}}{q-q^{-1}}\quad(\beta\in\mathbb{C}^\times,\,\gamma\in\mathbb{C})$$

とおくと, $X=-\gamma$ となるので, 整理すると, $t\geq 2$ に対し,

$$u_t=q^{-1}\gamma+Q^{-t}\frac{1-\beta^{-2}}{q-q^{-1}}+\sum_{k=1}^{t-1}q^{-1}\gamma^kQ^{-t+k}(1-\beta^{-2})$$

となるが, この等式は $t=1$ の場合も成り立つ。そこで, $\widetilde{\beta}=\frac{1-\beta^{-2}}{q-q^{-1}}$ とおき, 以上のことと, 基本関係式を用いて計算すると,

$$\mathcal{X}_t^+\cdot v_0=0,\quad \mathcal{X}_t^-\cdot v_0=\gamma^tv_1,\quad \mathcal{K}^+\cdot v_0=\beta qv_0,$$

$$\mathcal{J}_t\cdot v_0=\begin{cases}(q^{-1}+q^{-2}\widetilde{\beta})v_0 & \text{if } t=0,\\ \Bigl\{q^{-1}\gamma^t+Q^{-t}\widetilde{\beta}+(q-q^{-1})\displaystyle\sum_{k=1}^{t-1}q^{-1}\gamma^kQ^{-t+k}\widetilde{\beta}\Bigr\}v_0 & \text{if } t>0,\end{cases}$$

$$\mathcal{X}_t^+\cdot v_1=\bigl(\beta^{-1}-Q\beta\gamma\bigr)\gamma^tv_0,\quad \mathcal{X}_t^-\cdot v_1=0,\quad \mathcal{K}^+\cdot v_1=\beta q^{-1}v_1,$$

$$\mathcal{J}_t\cdot v_1=\begin{cases}(-q+q^2\widetilde{\beta})v_1 & \text{if } t=0,\\ \Bigl\{-q\gamma^t+Q^{-t}\widetilde{\beta}-(q-q^{-1})\displaystyle\sum_{k=1}^{t-1}q\gamma^kQ^{-t+k}\widetilde{\beta}\Bigr\}v_1 & \text{if } t>0\end{cases}$$

となる。逆に, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の 2 次元表現 $\mathcal{D}^{\langle Q\rangle}_{\gamma,\beta}(2) = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1$ ($\gamma \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}^{\times}$) を上の作用によって定めると, これは well-defined であることが分かる。以上より, $Q \neq 0$ のとき, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の 2 次元最高ウェイト加群は, ある $\mathcal{D}^{\langle Q\rangle}_{\gamma,\beta}(2)$ と同型であることが分かる。$\mathcal{D}^{\langle Q\rangle}_{\gamma,\beta}(2)$ の既約性については,

$$\mathcal{D}^{\langle Q\rangle}_{\gamma,\beta}(2) : \text{既約} \ \Leftrightarrow \gamma \neq Q^{-1}\beta^{-2}$$

となる。以上より, 以下のことが成り立つ。

Proposition 5.3.

(i) $Q = 0$ のとき, 2 次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群は, $\mathcal{D}^{\langle 0\rangle}_{\gamma,\pm 1}(2)$ *(*$\gamma \in \mathbb{C}$*)* と同型である。

(ii) $Q \neq 0$ のとき, 2 次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群は, $\mathcal{D}^{\langle Q\rangle}_{\gamma,\beta}(2)$ *(*$\gamma \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}^{\times}$ *s.t.* $\gamma \neq Q^{-1}\beta^{-2}$*)* と同型である。

5.4. 2 次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-加群の evaluation 加群について考えよう。$U_q(\mathfrak{sl}_2)$-加群 $L^{\pm}(2) = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1$ を

$$\begin{aligned} &e \cdot v_0 = 0, \quad f \cdot v_0 = v_1, \quad K^+ \cdot v_0 = \pm q v_0, \\ &e \cdot v_1 = \pm v_0, \quad f \cdot v_1 = 0, \quad K^+ \cdot v_1 = \pm q^{-1} v_1, \end{aligned}$$

によって定まるものとする。Proposition 2.6 より, $L^{\pm}(2)$ の $\gamma \in \mathbb{C}$ における evaluation 加群 $L^{\pm}(2)^{\mathbf{ev}^{\langle Q\rangle}_{\gamma}} = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1$ は,

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}^+_t \cdot v_0 = 0, \quad \mathcal{X}^-_t \cdot v_0 = (\pm 1)^t \gamma^t v_1, \quad \mathcal{K}^+ \cdot v_0 = \pm q v_0, \quad \mathcal{J}_t \cdot v_0 = (\pm 1)^t q^{-1} \gamma^t v_0, \\ &\mathcal{X}^+_t \cdot v_1 = (\pm 1)^{t+1} (1 \mp Q\gamma) \gamma^t v_0, \quad \mathcal{X}^-_t \cdot v_1 = 0, \quad \mathcal{K}^+ \cdot v_1 = \pm q^{-1} v_1, \\ &\quad \mathcal{J}_t \cdot v_1 = (\pm 1)^{t-1} (\mp 1) q \gamma^t v_1, \end{aligned}$$

となる。よって, $\mathcal{D}^{\langle Q\rangle}_{\gamma,\pm 1}(2)$ の定義と見比べれば ($\beta = \pm 1$ のとき, $\widetilde{\beta} = 0$),

$$\mathcal{D}^{\langle Q\rangle}_{\gamma,1}(2) \cong L^+(2)^{\mathbf{ev}^{\langle Q\rangle}_{\gamma}}, \quad \mathcal{D}^{\langle Q\rangle}_{\gamma,-1}(2) \cong L^-(2)^{\mathbf{ev}^{\langle Q\rangle}_{-\gamma}} \tag{5.4.1}$$

を得る。

5.5. $Q=0$ のとき, 2 次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群は, $\mathcal{D}_{\gamma,\pm 1}^{\langle Q\rangle}(2)$ $(\gamma\in\mathbb{C})$ と同型であったので, (5.4.1) より, これらは全て $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-加群 $L^{\pm}(2)$ の evaluation 加群として得られる。しかし, $Q\neq 0$ のときは, 全ての 2 次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群が, $L^{\pm}(2)$ の evaluation 加群として得られるわけではない。

そこで, $\gamma\in\mathbb{C}$ と $\beta\in\mathbb{C}^{\times}$ に対し, 2 次元 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{D}_{\gamma,1}^{\langle 0\rangle}(2)\cong L^{+}(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma}^{\langle 0\rangle}}=\mathbb{C}v_0\oplus\mathbb{C}v_1$ と 1 次元 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{D}_{\beta}^{\langle Q\rangle}(1)=\mathbb{C}v$ とのテンソル積 $\mathcal{D}_{\beta}^{\langle Q\rangle}(1)\otimes_{\mathbb{C}}L^{+}(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma}^{\langle 0\rangle}}$ を Proposition 2.11 (ii) の $\Delta_r^{\langle Q\rangle}$ を用いて, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群とみなしたものを考えよう。すると, $\mathcal{D}_{\beta}^{\langle Q\rangle}(1)\otimes L^{+}(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma}^{\langle 0\rangle}}=\mathbb{C}v\otimes v_0\oplus\mathbb{C}v\otimes v_1$ 上の $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ 上の作用は,

$$\mathcal{X}_t^{+}\cdot v\otimes v_0=0,\ \mathcal{X}_t^{-}\cdot v\otimes v_0=(\beta^{-1}-Q\beta\gamma)\gamma^t v\otimes v_1,\ \mathcal{K}^{+}\cdot v\otimes v_0=\beta q v\otimes v_0,$$

$$\mathcal{J}_t\cdot v\otimes v_0=\begin{cases}(q^{-1}+q^{-2}\widetilde{\beta})v\otimes v_0 & \text{if } t=0,\\ \Big(q^{-1}\gamma^t+Q^{-t}\widetilde{\beta}+(q-q^{-1})\displaystyle\sum_{k=1}^{t-1}q^{-1}\gamma^kQ^{-t+k}\widetilde{\beta}\Big)v\otimes v_0, & \text{if } t>0\end{cases}$$

$$\mathcal{X}_t^{+}\cdot v\otimes v_1=\gamma^t v\otimes v_0,\quad \mathcal{X}_t^{-}\cdot v\otimes v_1=0,\quad \mathcal{K}^{+}\cdot v\otimes v_1=\beta q^{-1}v\otimes v_1,$$

$$\mathcal{J}_t\cdot v\otimes v_1=\begin{cases}(-q+q^{2}\widetilde{\beta})v\otimes v_1 & \text{if } t=0,\\ \Big(-q\gamma^t+Q^{-t}\widetilde{\beta}-(q-q^{-1})\displaystyle\sum_{k=1}^{t-1}q\gamma^kQ^{-t+k}\widetilde{\beta}\Big)v\otimes v_1 & \text{if } t>0\end{cases}$$

となる。ここで, $\gamma\neq Q^{-1}\beta^{-2}$ とすると, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群の同型写像

$$\mathcal{D}_{\beta}^{\langle Q\rangle}(1)\otimes L^{+}(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma}^{\langle 0\rangle}}\xrightarrow{\cong}\mathcal{D}_{\gamma,\beta}^{\langle Q\rangle}(2),\ v\otimes v_0\mapsto v_0,\ v\otimes v_1\mapsto\frac{1}{\beta^{-1}-Q\beta\gamma}v_1$$

が存在することが分かる。一方で, $\gamma=Q^{-1}\beta^{-2}$ のとき, $\mathbb{C}v\otimes v_0$ は $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-部分加群となるので, $\mathcal{D}_{\beta}^{\langle Q\rangle}(1)\otimes L^{+}(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma}^{\langle 0\rangle}}$ は既約ではない。特に, このとき, $\mathcal{D}_{\beta}^{\langle Q\rangle}(1)\otimes L^{+}(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma}^{\langle 0\rangle}}$ は最高ウェイト加群ではなく, 最低ウェイト加群である。$\mathcal{D}_{\gamma,\beta}^{\langle Q\rangle}(2)$ は最高ウェイト加群であったので,

$$\mathcal{D}_{\beta}^{\langle Q\rangle}(1)\otimes L^{+}(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma}^{\langle 0\rangle}}\not\cong\mathcal{D}_{\gamma,\beta}^{\langle Q\rangle}(2)\quad \text{if } \gamma=Q^{-1}\beta^{-2}$$

である。

さて, 再び $Q=0$ の場合を考えると, $\Delta_r^{\langle 0\rangle}$ は $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ 上の余積 Δ と一致している。さらに, $\gamma\in\mathbb{C}$ と $\beta=\pm1$ に対し, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群の同型写像

$$\mathcal{D}_{\pm1}^{\langle 0\rangle}(1)\otimes L^+(2)^{\mathbf{ev}_\gamma^{\langle 0\rangle}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\gamma,\pm1}^{\langle Q\rangle}(2),\ v\otimes v_0\mapsto v_0,\ v\otimes v_1\mapsto(\pm1)v_1$$

が存在することが分かる。以上より, 次のことが成り立つ。

Corollary 5.6.

(i) $Q=0$ のとき, 2 次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群は, $\mathcal{D}_{\pm1}^{\langle 0\rangle}(1)\otimes L^+(2)^{\mathbf{ev}_\gamma^{\langle 0\rangle}}$ *(*$\gamma\in\mathbb{C}$*)* と同型である。

(ii) $Q\neq0$ のとき, 2 次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群は, $\mathcal{D}_\beta^{\langle Q\rangle}(1)\otimes L^+(2)^{\mathbf{ev}_\gamma^{\langle 0\rangle}}$ *(*$\gamma\in\mathbb{C},\ \beta\in\mathbb{C}^\times\ s.t.\ \gamma\neq Q^{-1}\beta^{-2}$*)* と同型である。

Remark 5.7. $\gamma=Q^{-1}\beta^{-2}$ のとき, $\mathcal{D}_\beta^{\langle Q\rangle}(1)\otimes L^+(2)^{\mathbf{ev}_\gamma^{\langle 0\rangle}}$ は最高ウェイト加群ではなかった。実際には, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ の余積を取り替えて, その余積に関して適切に $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ 上に $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ の余加群構造を与えれば, テンソル積表現 $L^+(2)^{\mathbf{ev}_\gamma^{\langle 0\rangle}}\otimes\mathcal{D}_\beta^{\langle Q\rangle}(1)$ (素直に考えれば右左が逆になるはず) が $\gamma=Q^{-1}\beta^{-2}$ の場合でも最高ウェイト加群となる ($\mathcal{D}_{\gamma,\beta}^{\langle Q\rangle}(2)$ と同型になる) ように取れるはずである。この辺りの事情については (おそらく重要な) 議論の余地があるように思われるが, とりあえず, 今回は $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ の余積が, 量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の場合に Chari-Pressley らが使っている余積と整合的になるようにすることにした。

6 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$ の有限次元既約表現

Proposition 3.4 より, 有限次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群の同型類を分類するには, 既約最高ウェイト加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元となるような最高ウェイト

$\mathbf{u} \in \mathbb{C}^\times \times \prod_{t>0} \mathbb{C}$ を分類すればよかった。この分類はまだ完成していないが, ここでは, $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元となるための十分条件を与えよう。

6.1. まず $Q = 0$ の場合を考えよう。この場合は, 量子ループ代数の場合の議論と全く同じである。

2 次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-加群 $L^+(2)$ の $\gamma_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \ldots, n)$ における evaluation 加群 $L^+(2)^{\mathbf{ev}^{\langle 0 \rangle}_{\gamma_k}}$ を考え, その最高ウェイトベクトルを $v_0^{(k)}$ とする。このとき,

$$(6.1.1) \quad \mathcal{X}_t^+ \cdot v_0^{(k)} = 0, \qquad \mathcal{K}^+ \cdot v_0^{(k)} = q v_0^{(k)}, \quad \mathcal{J}_t \cdot v_0^{(k)} = q^{-1} \gamma_k^t v_0^{(k)},$$

であった。また, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0 \rangle}[x])$ の 1 次元表現 $\mathcal{D}_\varepsilon^{\langle 0 \rangle}(1) = \mathbb{C}v$ $(\varepsilon = \pm 1)$ を考え, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0 \rangle}[x])$ の余積 Δ を用いてテンソル積表現

$$\mathcal{D}_\varepsilon^{\langle 0 \rangle}(1) \otimes L^+(2)^{\mathbf{ev}^{\langle 0 \rangle}_{\gamma_1}} \otimes L^+(2)^{\mathbf{ev}^{\langle 0 \rangle}_{\gamma_2}} \otimes \cdots \otimes L^+(2)^{\mathbf{ev}^{\langle 0 \rangle}_{\gamma_n}}$$

を考えると,

(6.1.2)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{X}_t^+ \cdot (v \otimes v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n)}) = 0 \quad (t \geq 0),\\
&\mathcal{K}^+ \cdot (v \otimes v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n)}) = \varepsilon q^n (v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n)}),\\
&\mathcal{J}_t \cdot (v \otimes v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n)})\\
&= v \otimes (\mathcal{J}_t \cdot (v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n-1)})) \otimes v_0^{(n)}\\
&\quad + (v \otimes v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n-1)}) \otimes (\mathcal{J}_t \cdot v_0^{(n)})\\
&\quad + (q - q^{-1}) \sum_{k=1}^{t-1} v \otimes (\mathcal{J}_k \cdot (v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n-1)})) \otimes (\mathcal{J}_{t-k} \cdot v_0^{(n)}) \ \ (t > 0)
\end{aligned}$$

を得る。よって, $\mathcal{J}_t$ の作用については, n に関して帰納的に考えることにより, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0 \rangle}[x]) \cdot (v \otimes v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n)})$ は $v \otimes v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n)}$ を最高ウェイトベクトルとする最高ウェイト加群である。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_t \cdot (v \otimes v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n)})\\
&= p_t(q)(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)(v \otimes v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n)})
\end{aligned}$$

$(p_t(q)(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{C})$ とおくと, (6.1.1) と (6.1.2) より,

$$\begin{aligned} &p_t(q)(\gamma_1) = q^{-1}\gamma_1^t, \\ &p_t(q)(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = p_t(q)(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}) + q^{-1}\gamma_n^t \\ &\qquad\qquad\qquad + (q - q^{-1}) \sum_{k=1}^{t-1} p_k(q)(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})(q^{-1}\gamma_n^{t-k}) \end{aligned}$$

となる。このことを用いて計算すると,

(6.1.3)

$$p_t(q)(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \sum_{\substack{\lambda \vdash t \\ \ell(\lambda) \leq n}} q^{-\ell(\lambda)}(q - q^{-1})^{\ell(\lambda)-1} m_\lambda(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$$

となることが分かる。ここで, $\lambda \vdash t$ は λ が t の分割であることを意味し, $\ell(\lambda)$ は λ の長さ, $m_\lambda(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ は $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ を変数とする λ に対応する単項対称式である。

そこで, $\mathbb{C}[x]$ を x を変数とする $\mathbb{C}$ 上の多項式環とし,

$$\mathbb{C}[x]^{\langle 0 \rangle} = \left\{ \varphi \in \mathbb{C}[x] \mid \varphi \text{ の最高次の係数は } \pm 1 \right\}$$

とおき, 写像

$$\mathbf{u}^{\langle 0 \rangle} : \mathbb{C}[x]^{\langle 0 \rangle} \to \mathbb{C}^\times \times \prod_{t>0} \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \mathbf{u}^{\langle 0 \rangle}(\varphi)$$

を, $\varphi = \varepsilon(x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \ldots (x - \gamma_n)$ のとき,

$$\mathbf{u}^{\langle 0 \rangle}(\varphi) = \left(\varepsilon q^{\deg \varphi}, (p_t(q)(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n))_{t>0} \right)$$

によって定めると, $\varphi = \varepsilon(x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \ldots (x - \gamma_n) \in \mathbb{C}[x]^{\langle 0 \rangle}$ に対し, 上での議論と最高ウェイト加群の性質より,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle 0 \rangle}(\varphi)) \cong \mathrm{Top}\left(U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0 \rangle}[x]) \cdot (v \otimes v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n)}) \right)$$

となり, 右辺の構成より, これは有限次元であることが分かる。

逆に, 既約最高ウェイト $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元ならば, ある $\varphi \in \mathbb{C}[x]^{\langle 0\rangle}$ が存在して, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\langle 0\rangle}(\varphi)$ となることが確かめられる。(実際には, こちらの方が大変で, 非自明なことであるが, 紙数の都合上, 今回は省略する。)

さらに, 写像 $\mathbf{u}^{\langle 0\rangle}$ は単射であることが確かめられるので, 以下のことを得る。

Theorem 6.2. $Q = 0$ のとき, 有限次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群の同型類の集合と $\mathbb{C}[x]^{\langle 0\rangle}$ が, 対応 $\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle 0\rangle}(\varphi)) \leftrightarrow \varphi$ の下で 1 対 1 に対応する。

Remark 6.3. 量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元既約表現を, Proposition 2.3 の Θ を通じて, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群と思ったものと, $\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle 0\rangle}(\varphi))$ との関係は以下のようになる。

まず, $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の (type 1 の) 有限次元既約加群の同型類は Drinfeld 多項式と呼ばれる定数項が 1 である多項式, つまり,

$$\mathbb{C}[x]^D = \{\varphi \in \mathbb{C}[x] \mid \varphi \text{ の定数項は } 1\}$$

によってパラメトライズされていたことを思い出そう ([CP91, Theorem 3.4])。$\varphi \in \mathbb{C}[x]^D$ に対し, 対応する有限次元既約 $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$-加群を $\widetilde{\mathcal{L}}^D(\varphi)$ とし, その最高ウェイトベクトルを v_0 とする。Θ を通じて, $\widetilde{\mathcal{L}}^D(\varphi)$ を $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群と思い,

$$\mathcal{L}^D(\varphi) = \mathrm{Top}\left(U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x]) \cdot v_0\right)$$

とおく。(実際には, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群として $\mathcal{L}^D(\varphi) \cong \widetilde{\mathcal{L}}^D(\varphi)$ となると思われるが*, きちんとチェックできていないので安全のためにこう書いた。) すると, $\mathcal{L}^D(\varphi)$ は有限次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群となるが, これに対応する

---

* $\mathfrak{gl}$ の場合は [MTZ04, Remark 3.2] を参照。

$\mathbb{C}[x]^{\langle 0\rangle}$ の元は以下のように与えられる。写像

$$\begin{aligned}&\sharp : \mathbb{C}[x]^D \to \mathbb{C}[x]^{\langle 0\rangle},\\&(1-\gamma_1 x)(1-\gamma_2 x)\ldots(1-\gamma_n x) \mapsto (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n),\end{aligned}$$

(ここで, $\gamma_k \neq 0$ $(k = 1,\ldots,n)$) を考えると, $\varphi \in \mathbb{C}[x]^D$ に対し, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群として,

$$\mathcal{L}^D(\varphi) \cong \mathcal{L}\big(\mathbf{u}^{\langle 0\rangle}(\sharp(\varphi))\big)$$

となる。(写像 $\sharp$ は単射である。)

$\mathbb{C}[x]^{\langle 0\rangle}$ の最高次の係数の符号は, 対応する加群が type 1 であるか type -1 であるかの違いだけである。一方で, $\mathbb{C}[x]^{\langle 0\rangle}$ の元は 0 を根に持つことも許されているのに対し, $\mathrm{Im}\,\sharp$ の元は 0 を根に持たないことは, $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$ が Θ を通じて, $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の “多項式部分” に制限したものであることによっている。このことは, すでに evaluation 準同型に現れている (Remark 2.8 (ii) 参照)。

6.4. 次に $Q \neq 0$ の場合を考えよう。$\varphi = \beta(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n) \in \mathbb{C}[x]$ に対し, $\beta^{-1}\varphi = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n) \in \mathbb{C}[x]^{\langle 0\rangle}$ に対応する既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle 0\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle 0\rangle}(\beta^{-1}\varphi))$ (v_0 をその最高ウェイトベクトルとする) と 1 次元 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{D}_\beta^{\langle Q\rangle}(1) = \mathbb{C}v$ とのテンソル積 $\mathcal{D}_\beta^{\langle Q\rangle}(1) \otimes \mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle 0\rangle}(\beta^{-1}\varphi))$ を $\Delta_r^{\langle Q\rangle}$ を通じて $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群と思う。すると,

$$\begin{aligned}&\mathcal{X}_t^+ \cdot v \otimes v_0 = 0 \quad (t \geq 0), \quad \mathcal{K}^+ \cdot v \otimes v_0 = \beta q^{\deg\varphi} v \otimes v_0,\\&\mathcal{J}_t \cdot v \otimes v_0 = \Big(p_t(q)(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) + \widetilde{\beta}Q^{-t}\\&\qquad\qquad + (q-q^{-1})\sum_{k=1}^{t-1} p_k(q)(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\widetilde{\beta}Q^{-t+k}\Big) v \otimes v_0 \quad (t > 0),\end{aligned}$$

(ここで, $\widetilde{\beta} = \frac{1-\beta^{-2}}{q-q^{-1}}$) となることが分かる。そこで, $t > 0$, $\beta \in \mathbb{C}^\times$ と

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{C}$ に対し,

(6.4.1)

$$p_t^{\langle Q\rangle}(q;\beta)(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = p_t(q)(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) + \widetilde{\beta} Q^{-t} + (q - q^{-1}) \sum_{k=1}^{t-1} p_k(q)(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \widetilde{\beta} Q^{-t+k}$$

とおき, 写像

$$\mathbf{u}^{\langle Q\rangle} : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}^\times \times \prod_{t>0} \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi)$$

を, $\varphi = \beta(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n)$ のとき,

$$\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi) = \left(\beta q^{\deg\varphi}, (p_t^{\langle Q\rangle}(q;\beta)(\gamma_1, \ldots, \gamma_n))_{t>0}\right)$$

によって定めると, $\varphi = \beta(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n) \in \mathbb{C}[x]$ に対し,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi)) \cong \mathrm{Top}\left(U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x]) \cdot v \otimes v_0\right)$$

となり, 右辺の構成よりこれは有限次元となる。よって次のことを得る。

Proposition 6.5. $Q \neq 0$ のとき, $\varphi \in \mathbb{C}[x]$ に対し, 既約最高ウェイト $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi))$ は有限次元である。

6.6. $\varphi \in \mathbb{C}[x]$ に対し, $\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi))$ が有限次元であることは分かった。しかし, 写像 $\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}$ は単射ではない。つまり, $\varphi, \varphi' \in \mathbb{C}[x]$ $(\varphi \neq \varphi')$ で $\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi)) \cong \mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi'))$ となるものが存在する。いつ, $\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi) = \mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi')$ となるかについては, $p_t^{\langle Q\rangle}(q;\beta)(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ が具体的に記述できているため ((6.1.3) と (6.4.1)), 直接組合せ論的な議論で以下のような必要十分条件を得ることができる。

Lemma 6.7. $\varphi, \varphi' \in \mathbb{C}[x]$ *(*$\deg\varphi \geq \deg\varphi'$*)* に対し, $\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi) = \mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi')$ となるための必要十分条件は,

$$\varphi = q^{-(\deg\varphi - \deg\varphi')}\varphi' \prod_{k=1}^{\deg\varphi-\deg\varphi'} (x - q^{-2(k-1)}\beta_\varphi^{-2}Q^{-1})$$

である。ここで β_φ は φ の最高次の係数である。特に, $\varphi \in \mathbb{C}[x]$ に対し,

(i) $\deg\varphi = \deg\varphi'$ かつ $\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi) = \mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi')$ ならば, $\varphi' = \varphi$ である。

(ii) $\deg\varphi > \deg\varphi'$ かつ $\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi) = \mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi')$ となる $\varphi' \in \mathbb{C}[x]$ が存在するための必要十分条件は, φ が $\beta_\varphi^{-2}Q^{-1}$ を根に持つことである。

6.8. そこで, $Q \neq 0$ のとき,

$$\mathbb{C}[x]^{\langle Q\rangle} = \left\{\varphi \in \mathbb{C}[x] \mid \varphi \text{ は } \beta_\varphi^{-2}Q^{-1} \text{ を根に持たない} \right\}$$

とおけば, Lemma 6.7 より, 写像 $\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}$ を $\mathbb{C}[x]^{\langle Q\rangle}$ に制限したものは単射である。さらに, $\varphi' \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}[x]^{\langle Q\rangle}$ に対し, $\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi') = \mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi)$ となる $\varphi \in \mathbb{C}[x]^{\langle Q\rangle}$ が存在する。

6.9. 逆に, $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元であるならば, ある $\varphi \in \mathbb{C}[x]^{\langle Q\rangle}$ が存在して, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi)$ となるはずである。(やるべきことは分かっているが, まだ計算が終わっていない。$q = 1$ のとき (変形カレントリー代数 $\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x]$ のとき) は [Wad18, Proposition 5.5 (ii)] で対応するものが得られている。) このことが示せれば, 有限次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群の同型類の集合と $\mathbb{C}[x]^{\langle Q\rangle}$ が, 対応 $\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi)) \leftrightarrow \varphi$ の下で 1 対 1 に対応する。($Q = 0$ のときは, Theorem 6.2 だった。)

参考文献

[CP91] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. Quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 142(2):261–283, 1991.

[Jim86] Michio Jimbo. A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 11(3):247–252, 1986.

[MTZ04] A. I. Molev, V. N. Tolstoy, and R. B. Zhang. On irreducibility of tensor products of evaluation modules for the quantum affine algebra, arXiv:math/0309468v2. (*J. Phys. A*, 37(6):2385–2399, 2004 から出版されているがそちらは持っていないので arXiv を参照した).

[和田 09] 和田堅太郎. Presenting cyclotomic q-Schur algebras, 第１２回代数群と量子群の表現論研究集会 報告集, 2009.

[和田 13] 和田堅太郎. Cyclotomic q-Schur 代数の Drinfeld 型の表示について, 数理解析研究所講究録, 1870:58-76, 2013.

[和田 16] 和田堅太郎. 変形カレント Lie 代数の有限次元既約表現. 第２回 *Algebraic Lie Theory and Representation Theory* 報告集, 2016.

[Wad16] Kentaro Wada. New realization of cyclotomic q-Schur algebras. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 52(4):497–555, 2016.

[Wad18] Kentaro Wada. Finite dimensional simple modules of deformed current Lie algebras. *J. Algebra*, 501:1–43, 2018.